MATERIAL DE REPASO PARA INGRESANTES

NÚMEROS

Naturales ($\mathbb{N}$)

El conjunto: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots..\}$ se denomina conjunto de **número naturales**.

Los **números naturales** son aquellos que nos permiten contar los elementos de un determinado conjunto. Por representar cantidades, hay **número naturales** que representan más que otros. Para mostrar que un número es mayor que otro usaremos el símbolo *"mayor que": >* mientras para indicar que un número es menor que otro usamos el símbolo <, que es leído como *"menor que".*

$a > b$: a es mayor que b

$b < a$: b es menor que a

1) Completar con el símbolo que corresponda:

a) 313   323
b) 987   554
c) 176   218
d) 213   224
e) 199   1 99
f) 332   276

Con el conjunto de los **números naturales** podemos realizar sumas y multiplicaciones, pero no siempre podemos restar y dividir.

Uso de los paréntesis

Cuando realizamos operaciones entre números, **los paréntesis determinan el orden y la prioridad de unas sobre otras**. Por ejemplo, en la expresión:

$$(2 + 7) - (1 + 4)$$

primero debemos resolver $(2 + 7)$ y $(1 + 4)$ y luego resolver $(9) - (5)$.

Siendo el resultado de la expresión igual a cuatro:

$$(2 + 7) - (1 + 4)$$
$$= 9 - 5$$
$$= 4$$

No obtendremos el mismo resultado si hacemos las operaciones en otro orden. Ej.

$$(2) + (7 - 1 + 4)$$
$$2 + 10$$
$$= 12$$

Nota que los números y los signos de suma y resta están en el mismo orden que en ejemplo anterior, sólo se ha cambiado la ubicación de los paréntesis.

Cuando hay paréntesis contenidos dentro de otros, resolveremos "de adentro hacia afuera", es decir:

$$\big(9 + (5 - 1)\big)$$

$$= (9 + 4)$$

$$= 13$$

Los paréntesis agrupan ciertos números para indicar cuáles son las operaciones que debes realizar primero, por esta razón son llamados **signos de agrupación**.

Propiedades de la suma:

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ Ej. $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$

$$(5) + 5 = 2 + (8)$$

$$10 = 10$$

Elemento Neutro: $a + 0 = a$ Ej. $7 + 0 = 7$

Conmutativa: $a + b = b + a$ Ej. $3 + 5 = 5 + 3$

$$8 = 8$$

Propiedades de la multiplicación:

Asociativa: $(a.b) .c = a .(b .c)$ Ej. $(2 .3) .5 = 2 .(3 .5)$

$$(6) .5 = 2 .(15)$$

$$30 = 30$$

Elemento Neutro: $a .1 = a$ Ej. $7 .1 = 7$

Conmutativa: $a .b = b .a$ Ej. $3 .5 = 5 .3$

$$15 = 1$$

Distributiva respecto a la suma: $a .(b + c) = (a.b) + (a .c)$

Ej. $3 .(2 + 4) = (3 .2) + (3 .4)$

$$3 .(6) = 6 + 12$$

$$18 = 18$$

Cualquier número multiplicado por 0 da 0.

<u>Enteros</u> ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} =$ {….-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …} este es el conjunto de los **números enteros**, que está constituido por los naturales, el cero y los números negativos.

Además de poder representar cantidades enteras positivas, los **números enteros** nos permiten representar cantidades enteras negativas. En el conjunto de los **números enteros** también existe una relación de orden.

Son tres las operaciones entre **números enteros** que tienen como resultado **números enteros**: la suma, la resta y la multiplicación.

Propiedades de la resta:

La resta no es asociativa, ni conmutativa. <u>Como ejercitación, demostrar con ejemplos.</u>

<u>2) Resolver:</u>

a) $(24 + (12 - 5) - (5 + 2)) =$
b) $(55 + 7) - (7 + (5 + 2)) =$
c) $(24 - (12 + 5) - (5 + 2)) =$
d) $(115 + (172 - 54) - (63 + 2)) =$
e) $90 - (84 + 74) - 87 + (125 - 75) =$
f) $(281 + 14) - 24 - (325 - 33) =$

Regla de los signos

Si multiplicamos dos términos de signos iguales el término resultante es positivo $(+)$, de signos diferentes el resultado es negativo $(-)$:

$$+ \,.\, + = +$$

$$+ \,.\, - = -$$

$$- \,.\, + = -$$

$$- \,.\, - = +$$

<u>3) Resolver:</u>

a) $(24\,.\,(12 - 5) - 2\,.\,(5 + 2)) =$
b) $-2\,.\,(35 + 7) - (7\,.\,(5 - 7)) =$
c) $(24\,.\,(123 - 123) - (5 + 2)) =$
d) $(3\,.\,(124 - 74) - 3\,.\,(325 - 275)) =$
e) $2\,.\,(34 - 17) - 3\,.\,(25 - 32) =$
f) $-(34 + 14) + 8\,.\,(85 - 75) =$

<u>Racionales ($\mathbb{Q}$)</u>

$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \ y \ b \neq 0\}$ es el conjunto los **números racionales** que está formado por todos los números enteros y los fraccionarios. Se incorpora otra operación algebraica: la división.

Una fracción es el cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$; donde a es el *numerador* y b es el *denominador*. Todo número entero puede ser expresado como fracción. Ej. $3 = \frac{3}{1}$.

No está definida la división por cero.

Propiedades de la división

La división **no** es conmutativa; es decir el intercambio del orden de la operación lleva a un resultado diferente. Es decir: si $a \neq b$, entonces $a \div b \neq b \div a$

Ej. $4 \div 2 = 2 \quad \neq \quad 2 \div 4 = 0{,}5$

La división **no** es asociativa. Es decir: $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$

Ej. $(24 \div 4) \div 2 = 3 \quad \neq \quad (24) \div (4 \div 2) = 12$

Cero dividido entre cualquier número siempre da cero. Ej. $0 \div 7$, quiere decir que estamos distribuyendo cero unidades en siete partes iguales. ¿Cuántas unidades debe tener cada parte? ¡cero! Para generalizar esta idea podemos decir que si a es cualquier número diferente de cero: $0 \div a = 0$

No se puede dividir por cero

Pensemos ahora en el resultado de la expresión $4 \div 0$. ¿Cuántos grupos de cero puedes formar con cuatro unidades? ¿cero, uno, dos, tres, cuatro, ninguno, o muchos?

División con suma y resta

La división, cuando de operaciones básicas se trata, tiene la misma jerarquía que la multiplicación. Cuando en una expresión aparecen **paréntesis**, estos nos dicen con qué números debemos operar primero. Sin embargo, en muchas ocasiones pueden no aparecer, entonces es necesario saber cómo proceder

=> Las divisiones y multiplicaciones tienen prioridad sobre las sumas y las restas, por lo tanto lo primero que vamos a resolver son las divisiones y multiplicaciones; y luego las sumas y restas.

Ej. $7 - 9 \div 3 + 8 \,.\, 2 = 7 - 3 + 16 = 20$

No solo es posible dividir números positivos, también podemos encontrar divisiones en las que intervienen números negativos. En este caso vale **la regla de los signos**.

Propiedades de los racionales

Si se multiplican o dividen numerador y denominador por un mismo número, la fracción no varía.

Ej. divido numerador y denominador por 5

$$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

Entonces podemos decir que $\frac{25}{15}$y $\frac{5}{3}$ son fracciones equivalentes.

Si se multiplica o divide numerador por un mismo número, la fracción queda multiplicada o dividida por ese número, es decir sí varía. Ej. divido numerador por 5 :

$$\frac{(25 \div 5)}{15} = \frac{5}{15} \neq \frac{25}{15}$$

Suma y resta de números racionales

Igual denominador $\longrightarrow$ se calcula sumando (o restando) sus numeradores y el denominador se mantiene.

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}$$

Ej.:

$$\frac{25}{40} + \frac{12}{40} = \frac{25+12}{40} = \frac{37}{40}$$

Distinto denominador $\longrightarrow$ Cuando el denominador es distinto, tenemos que realizar más operaciones. Hay dos posibilidades, **(1)** buscar el mcm (mínimo común múltiplo), si no hay un mcm, entonces **(2)** debemos multiplicarse en las fracciones el numerador de una por el denominador de la otra y sumarse, mientras que el denominador resultante será el producto de los denominadores.

(1)

Si $d = 2 . b$ entonces,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{2 . b} = \frac{2 . a}{2 . b} + \frac{c}{2 . b} = \frac{2 . a + c}{2 . b} = \frac{2 . a + c}{d}$$

Ej.:

$$\frac{4}{7} + \frac{3}{14} = \frac{2 . 4}{2 . 7} + \frac{3}{14} = \frac{8}{14} + \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$$

(2)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a . d) \pm (b . c)}{(b . d)}$$

Ej.:

$$\frac{7}{2} - \frac{3}{5} = \frac{(7 . 5) - (2 . 3)}{(2 . 5)} = \frac{29}{10}$$

<u>4) Resolver:</u>

a) $\frac{66}{4} - \frac{33}{4} - \frac{1}{4} =$

b) $\frac{13}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{6} =$

c) $\frac{4}{5}-\frac{2}{7}+\frac{3}{8}=$

d) $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{7}{8}=$

e) $\frac{7}{3}+\frac{3}{5}=$

f) $\frac{7}{8}-\frac{9}{7}=$

g) $\frac{9}{13}+\frac{4}{7}=$

h) $3+\frac{5}{7}=$

Producto de números racionales

El producto de dos o más números racionales da como resultado un número racional cuyo numerador el producto de los numeradores y el denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f}=\frac{a\,.\,c.\,e}{b\,.\,d.\,f}$$

Ej.

$$\frac{2}{5}.\frac{3}{2}.\frac{1}{3}=\frac{2\,.\,3\,.\,1}{5\,.\,2\,.\,3}=\frac{6}{30}$$

⇨ ***Propiedades del producto de racionales***

Asociativa

$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$$

Conmutativa

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$$

Elemento Neutro

$$\frac{a}{b}.1=\frac{a}{b}$$

Distributiva

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}.\frac{e}{f}\right)$$

Elemento Simétrico

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=1$$

División de números racionales

La división (o cociente) de dos números racionales da como resultado un número racional que:

- en el numerador tiene el producto del numerador de la primera fracción y del denominador de la segunda,
- en el denominador tiene el producto del denominador de la primera fracción y del numerador de la segunda.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$$

Ej.

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{6} = \frac{2\ .\ 6}{7\ .\ 3} = \frac{12}{21}$$

- Podemos escribir una división de fracciones como una multiplicación de fracciones, invirtiendo la segunda fracción.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{a\ .\ d}{b\ .\ c}$$

Ej.

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} . \frac{7}{4} = \frac{3\ .\ 7}{5\ .\ 4} = \frac{21}{20}$$

5) Resolver:

a) $\frac{12}{5} . \frac{3}{4} =$

b) $\frac{8}{26} \div \frac{3}{9} =$

c) $\frac{4}{5} . \frac{2}{3} \div \frac{3}{8} =$

d) $\frac{3}{4} \div \frac{4}{5} + \frac{3}{16} =$

e) $\frac{1}{3} . \left(\frac{7}{3} + \frac{3}{5}\right) =$

f) $\left(\frac{7}{8} - \frac{9}{7}\right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4}\right) =$

Reales **(**$\mathbb{R}$)

Son todos los números racionales y los irracionales, estos últimos son los números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros ej., $\sqrt{2}$.

⇨ Suma, resta, multiplicación (y por ende potenciación), división y radicación son las operaciones que podemos hacer en el conjunto de los **números reales**.

La potenciación

La potencia a^n es el producto de n veces el número a. Llamamos *base* al número a se llama y *exponente* al número n.

La potencia 3^2 (tres al cuadrado) es el producto de dos treses:

$$3^2 = 3 . 3 = 9$$

Propiedades de la potencia

Toda potencia de *base* 1 es igual a la unidad: $1^n = 1$ Ej. $1^7 = 1$

Toda potencia de *exponente* 1 es igual a la *base*: $a^1 = a$ Ej. $7^1 = 7$

Toda potencia de *exponente* 0 es igual a la unidad: $a^0 = 1$ siendo $a \neq 0$ Ej. $7^0 = 1$

La potencia $(-1)^2$ es el producto de dos unos negativos. Ej. $(-1)^2 = (-1).(-1) = 1$

Si la *base* de una potencia es negativa:

- El resultado es positivo $(+)$ si el *exponente* es par.
- El resultado es negativo $(-)$ si el *exponente* es impar.

Esto puede resumirse como: $si\ a > 0$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, si\ n\ es\ par \\ -(a^n), si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

La potencia de un número distinto de 0 elevado al número negativo $-n$ es el inverso del número elevado a n:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0) \qquad \text{Ej. } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

El producto de dos potencias con la misma *base* es la potencia de dicha *base* y cuyo *exponente* es la suma de los *exponentes*:

$$a^n . a^m = a^{(n+m)} \qquad \text{Ej. } 3^2 . 3^3 = 3^{(2+3)}$$

$$9 . 27 = 3^{(5)}$$

$$243 = 243$$

El cociente de dos potencias con la misma *base* es la potencia de dicha *base* y cuyo *exponente* es la resta de los exponentes:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)} \qquad \text{Ej. } \frac{2^4}{2^2} = 2^{(4-2)}$$

$$\frac{16}{4} = 2^{(2)}$$

$$4 = 4$$

La potencia de una potencia con *base* a es la potencia con *base* a y cuyo *exponente* es el producto de los *exponentes*:

$$(a^n)^m = a^{n\ \cdot\ m} \qquad \text{Ej. } (2^2)^3 = 2^{2\ \cdot\ 3}$$

$$4^3 = 2^6$$

$$64 = 64$$

La potencia de un producto de factores es igual al producto de las potencias de los factores:

$$(a\ .\ b)^n = a^n . b^n \qquad \text{Ej. } (2\ .\ 3)^2 = 2^2\ .\ 3^2$$

$$(6)^2 = 4\ .\ 9$$

$$36 = 36$$

La potencia de un cociente de números es igual al cociente de las potencias de los números:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{Ej. } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

El resultado de elevar una fracción a -1 es la fracción inversa (e.g. intercambiar el numerador y el denominador):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

La potencia de una fracción con *exponente* negativo $-n$ es la potencia del inverso de la fracción con *exponente* n:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \qquad \text{Ej. } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = \frac{3^2}{1^2} = 9$$

<u>6) Resolver:</u>

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} =$

c) $7^{-3} =$

d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} =$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 . \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

f) $\left(\frac{4}{9}\right)^0 =$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \div \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

h) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^3 =$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

j) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{-2} =$

La radicación

Definimos la raíz n-ésima de un número real a, a la expresión:

Índice

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ donde n es un número natural.

Radicando

Es la operación inversa a la potencia.

Podemos expresar un radical como potencia de exponente racional de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ej. $\sqrt[2]{5^3} = 5^{3/2}$

Propiedades de los radicales

Símbolo de la raíz*:

Si el *índice* es par y el *radicando* positivo $(+)$ => $+$

Si el *índice* es par => el *radicando* no puede ser negativo $(-)$

Si el *índice* es impar y el *radicando* positivo $(+)$ => $+$

Si el *índice* es impar y el *radicando* negativo $(-)$ => $-$

* El símbolo √ significa "raíz cuadrada positiva", si se quiere los dos resultados debemos anteponer el símbolo ±.

El producto de dos radicales con el mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,.\,b}$$

Ej. $\sqrt[5]{2} \,.\, \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2\,.\,3} = \sqrt[5]{6}$

El cociente de dos radicales con el mismo índice:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ej. $\frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{6}{3}} = \sqrt[5]{2}$

Potencia de radicales:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ej. $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$

Raíz de un radical:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\,.\,m]{a}$$

Ej. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[2\,.\,3]{81} = \sqrt[6]{81}$

<u>7) Resolver usando las propiedades:</u>

a) $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{32} =$
b) $\sqrt{15} \div \sqrt{3} =$

c) $\sqrt[5]{2} \, . \, \sqrt[5]{3}$ =
d) $\left(\sqrt{5}\right)^4$
e) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{100}}$
f) Expresar como potencia fraccionaria: $1/\sqrt{a}$ =

Logaritmo

El logaritmo de base b de un número $a > 0$ se representa como $log_b(a)$ y es un número c que cumple $b^c = a$

⇨ $Log_b(a) = c \;\Leftrightarrow b^c = a$

Nota: b debe ser un número real positivo distinto de 1.

⇨ El **logaritmo decimal** es el logaritmo de base 10:

$$Log_{10}(a) = c \;\Leftrightarrow 10^c = a$$

Nota: En general la base del logaritmo decimal no se indica.

⇨ El **logaritmo natural** es el logaritmo de base e (donde e es el nº de Euler e≈2,7182….)

$$Log_e(a) = \ln(a) = c \;\Leftrightarrow e^c = a$$

8) Resolver:

a) $\log(1) =$
b) $\log(100) =$
c) $\log(0{,}1) =$
d) $\log(0{,}01) =$
e) $\log(0{,}001) =$
f) $\log_2(16) =$
g) $\log_2(2) =$
h) $\ln(e) =$

POLINOMIOS

Un polinomio es una expresión de la forma: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_ix^i + \cdots + a_nx^n$

Donde: a_0; a_1; a_2; … ; a_n son los coeficientes del polinomio (son números reales). En particular a_0 es el término independiente.

Llamamos grado de un polinomio al exponente de la mayor potencia cuyo coeficiente es distinto de 0.

Ej: $P(x) = 3 + 2x - 4x^2 + x^3 + 8x^4 - 2x^6$ => es un polinomio de grado 6

Dos polinomios son iguales si tienen igual grado y coinciden entre si los coeficientes de cada grado. Ej. $P(x) = 3x - 5x^4 + 6x^2$ y $Q(x) = 6x^2 + 3x - 5x^4$ => $P(x) = Q(x)$

Los polinomios pueden:

- Sumarse o restarse => se suman o restan los coeficientes de los términos que tienen la x con el mismo exponente.

  Ej. $P(x) = 5x + 2x^2 + 7x^3 - 2x^4$ y $Q(x) = 6x^2 + 3x - 5x^4$

  => $P(x) + Q(x) = 8x + 8x^2 + 7x^3 - 7x^4$

- Multiplicarse => se multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro.

  Ej. $P(x) = x + 2x^2 - 3x^4$ y $Q(x) = -3x^2 + x + 4x^3$

  => $P(x).Q(x)$

  $$\mathrm{P(x)} = x + 2x^2 - 3x^4 \quad . \quad \mathrm{Q(x)} = -3x^2 + x + 4x^3$$

  $$= x\,(-3x^2) + x(x) + x(4x^3) + 2x^2(-3x^2) + 2x^2(x) + 2x^2(4x^3) - 3x^4\,(-3x^2) - 3x^4(x) - 3x^4(4x^3)$$

  $$= -3x^3 + x^2 + 4x^4 - 6x^4 + 2x^3 + 8x^5 + 9x^6 - 3x^5 - 12x^7$$

  $$= x^2 - x^3 - 2x^4 + 5x^5 + 9x^6 - 4x^8$$

- Dividirse: La división de polinomios es similar a la división de números enteros. Para dividir dos polinomios es necesario que el grado del polinomio dividendo sea mayor o igual que el grado del divisor. Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tales que el grado de $P(x)$ es mayor o igual al grado de $Q(x)$. Entonces existen dos polinomios únicos $C(x)$ (polinomio cociente) y $R(x)$ (polinomio resto) tales que:

  $$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

  El grado del polinomio cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

⇨ grado de $C(x)$ = grado de $P(x)$ − grado de $Q(x)$

Procedimiento:

- Debemos ordenar el dividendo de forma decreciente, agregando los factores faltantes colocándoles coeficientes cero (Ej. $P(x) = 8x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 3 = 8x^5 + 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 3$).
- El primer término se encuentra dividiendo el término de mayor grado del dividendo por el de mayor grado del divisor.
- El cociente obtenido se multiplica por el divisor y el resultado se resta al dividendo.
- Se repite este procedimiento hasta obtener un polinomio de grado menor que el divisor que será el resto.

Ej.

$$\begin{array}{l}\text{Dividendo} \\ \begin{array}{rrrrr|l} \leftarrow & 3x^3 & +7x^2 & +6x & -1 & x+2 \longrightarrow \text{Divisor} \\ \cline{6-6} - & 3x^3 & 6x^2 & & & 3x^2+x+4 \longrightarrow \text{Cociente} \\ \cline{2-5} & & x^2 & +6x & -1 & \\ & - & x^2 & 2x & & \\ \cline{3-5} & & & 4x & -1 & \\ & & - & 4x & 8 & \\ \cline{4-5} & & & & -9 \longrightarrow \text{Resto} & \end{array}\end{array}$$

También podemos realizar la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(x - a)$, $a \epsilon \mathbb{R}$ aplicando "**La Regla de Ruffini"**, en el siguiente apartado se muestra una explicación detalla de la regla aplicada a la factorización de un polinomio de grado tres. A continuación mostraremos una comparación entre la división convencional y la regla de Ruffini aplicada al ejemplo anterior.

División convencional

$$\begin{array}{l}\text{Dividendo} \\ \begin{array}{rrrrr|l} \leftarrow & 3x^3 & +7x^2 & +6x & -1 & x+2 \longrightarrow \text{Divisor} \\ \cline{6-6} - & 3x^3 & 6x^2 & & & 3x^2+x+4 \longrightarrow \text{Cociente} \\ \cline{2-5} & & x^2 & +6x & -1 & \\ & - & x^2 & 2x & & \\ \cline{3-5} & & & 4x & -1 & \\ & & - & 4x & 8 & \\ \cline{4-5} & & & & -9 \longrightarrow \text{Resto} & \end{array}\end{array}$$

Regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{Coeficientes del Dividendo}}} \\ & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & \boxed{-9} \longrightarrow \text{Resto} \\ & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Coeficientes del Cociente}}} & \end{array}$$

<u>1) Efectuar en cada caso las siguientes operaciones:</u>

$$P(x) + Q(x), P(x) \,.\, Q(x), P(x)^2 - Q(x), x \,.\, P(x)$$

a) $P(x) = 2x + 1, Q(x) = x^2 + 4$
b) $P(x) = x^2 - 2, Q(x) = -x^2 + 6$

2) Hallar el cociente ($Q(x)$) y el resto ($R(x)$) de dividir $P(x)$ por $A(x)$

a) $P(x) = 4x^3 - 3x - 1, A(x) = 2x + 3$
b) $P(x) = -2x^5 - 4x^4 - x^3 - 8, A(x) = x + 2$
c) $P(x) = -x^6 + 2x^5 + 3x^3, A(x) = x^2 + 2x$

3) Resolver aplicando Ruffini

a) $(4x^3 - 3x^2 + 7) \div (x - 1)$
b) $(x^6 + 4x^5 - 7x^3 - 4) \div (x + 1)$
c) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

Factorización de Polinomios:

Consiste en encontrar todas sus raíces, y expresarlo como un producto de polinomios más simples, esto es, como un producto de polinomios de grado 1 o 2 que contengan las raíces.

Si el polinomio es grado dos:

- Dependiendo como esté planteado el polinomio podemos aplicar los **casos de factoreo** o **Baskara**.

Dado el polinomio: $ax^2 + bx + c$

Podemos encontrar las raíces (x_1 y x_2) aplicando **Baskara**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces podemos escribir el polinomio anterior como:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Si el polinomio es de grado mayor que dos:

- Podemos aplicar los casos de factoreo o aplicar "**La Regla de Ruffini**"

Cada vez que hacemos **Ruffini**, obtenemos un polinomio de grado uno ((x – x_1), donde x_1 es una posible raíz) y los coeficientes de un polinomio de un grado menor (un polinomio que divide al propio polinomio). Así, podemos ir reduciendo el grado del polinomio hasta llegar a uno de segundo grado cuyas raíces sabemos calcular rápidamente.

El método consiste escoger una "posible raíz" y desarrollar una tabla. Si el último resultado de la tabla es 0, la "posible raíz" es efectivamente raíz del polinomio.

Ejemplo de Aplicación

Tenemos el polinomio de grado 3: $x^3 - 3x - 2$

- Escribimos en la primera fila los coeficientes de cada término del polinomio en orden decreciente de grado. Si hay algún coeficiente que sea 0, también hay que escribirlo.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & x^3 & 0x^2 & -3x & -2 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & 0 & -3 & -2 \longrightarrow \text{Coeficientes} \\
 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}$$

- Buscamos una “posible raíz” (debe ser un número que sea divisor del término independiente) y lo escribimos en la columna de la izquierda. Luego, bajamos el primer coeficiente a la parte inferior de la línea, sin realizar ninguna operación.

$$\begin{array}{rc|cccc}
 & & 1 & 0 & -3 & -2 \\
\text{Posible raíz} \longrightarrow & 2 & & & & \\
\hline
 & & 1 & & &
\end{array}$$

- Ahora debemos multiplicar el coeficiente que bajamos por la “posible raíz” y el resultado lo escribimos debajo del siguiente coeficiente y arriba de la línea inferior.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & = & & & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & & & \\
\text{x} & & & &
\end{array}$$

- Sumamos el número que hemos escrito (resultado de la multiplicación del primer coeficiente con la “posible raíz”) con el coeficiente que tiene arriba y el resultado lo escribimos debajo de la línea.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & + & & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & = 2 & &
\end{array}$$

⇨ Repetimos el procedimiento: Multiplicamos el número obtenido por “posible raíz” y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & & = & \\
2 & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & & \\
 & \text{x} & & &
\end{array}
$$

⇨ Nuevamente, sumamos el número que hemos escrito con el coeficiente que tiene arriba y el resultado lo escribimos debajo de la línea.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & & + & \\
2 & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & =1 &
\end{array}
$$

⇨ Otra vez, multiplicamos el número obtenido por “posible raíz” y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & & & = \\
2 & & 2 & 4 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & \text{x} &
\end{array}
$$

⇨ Y sumamos el número que hemos escrito con el coeficiente que tiene arriba y el resultado lo escribimos debajo de la línea.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & & & + \\
2 & & 2 & 4 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & =0
\end{array}
$$

⇨ Si el número escogido como “posible raíz” es realmente una raíz del polinomio, entonces este último resultado de la suma (es decir, el resto) debe ser igual 0. Si no es así, significa que el número escogido no es raíz del polinomio.

$$\begin{array}{c|ccc|c|} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & & & + \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 2}_{} & & 1 & =0 \end{array} \longrightarrow \text{Resto}$$

Coeficientes

⇨ Siendo el resto igual a 0, ya tenemos una raíz ($x_1 = 2$), por lo que ya podemos reescribir nuestro polinomio factorizado.

Los números de debajo de la línea son los coeficientes del polinomio de un grado menor (en nuestro caso, de grado 2).

⇨ El polinomio encontrado, que posee un grado menor es:

$$x^2 + 2x + 1$$

Por tanto, la primera factorización es:

$$x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1)$$

⇨ Ahora podemos factorizar el polinomio obtenido por **Ruffini** para terminar de factorizar el polinomio original. Esto podemos hacerlo por cualquiera de los métodos conocidos, incluso por **Ruffini.**

Entones la factorización queda:

$$x^3 - 3x - 2$$
$$= (x^2 + 2x + 1)(x - 2)$$
$$= (x + 1)^2(x - 2)$$

Algunos Casos de Factoreo:

1) *Factor común*: Se aplica cuando en el polinomio hay “algo” que aparece en todos sus términos. Consiste en extraer ese algo, que puede ser la x a la mayor potencia que aparece en todos los términos, un coeficiente o ambos, y expresar el polinomio como un producto.

Ej. $P(x) = 10x^4 + 5x^3 - 20x^2 = 5x^2(2x^2 + x - 4)$

2) *Factor común por agrupación de términos*: Se aplica cuando el polinomio que queremos factorizar no posee un factor común a todos sus términos, pero sí por grupos.

Ej. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2(x-3) + 2(x-3) = (x^2+2)(x-3)$

3) *Diferencia de cuadrados perfectos*: $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$

Ej. $P(x) = x^2 - 9 = (x-3) + (x+3)$

Ojo!!! No confundir diferencia de cuadrado con diferencia al cuadrado. $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

4) *Trinomio cuadrado perfecto*:

El cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a.a + b.a + b.a + b^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

El cuadrado de una resta: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a.a - b.a - b.a + b^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$

Ej. $P(x) = (3x-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

5) *Cuatrinomio cubo perfecto*:

El cubo de una suma: $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2.a.b + b^2)(a+b) = a^2.a + 2.a.b.a + b^2.a + a^2.b + 2.a.b.b + b^2.b = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$

El cubo de una resta: $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2.a.b + b^2)(a-b) = a^2.a - 2.a.b.a + b^2.a - a^2.b + 2.a.b.b - b^2.b = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$

Ej. $P(x) = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

ECUACIONES

Una ecuación es una ***igualdad*** entre dos expresiones algebraicas en la cual aparece una *incógnita*, es decir un término del cual no conocemos el valor. Justamente, resolver una ecuación consiste en encontrar cuánto vale dicha *incógnita*. En general, la *incógnita* se representa con la letra "x".

Una ecuación es de primer grado cuando

- Sólo hay una *incógnita*.
- La *incógnita* tiene exponente 1.

Ejs. $x + 5 = 8$ o $2x + 9 = 17$

Como dijimos anteriormente, resolver una ecuación consiste en encontrar el valor de x. Decimos entonces, que vamos a "despejar la x"; para esto agrupamos de un lado de la igualdad los términos que contengan x y del otro lado los que no la contengan; hasta lograr que la x quede sola.

Es importante tener en cuenta que al pasar los términos de un lado al otro de la igualdad se lo hace con la operación inversa.

Ej. $2x + 9 = 17$

⇨ $2x = 17 - 9 = 8$

⇨ $x = 8/2$

⇨ $x = 4$

1) Resolver:

a) ¿Qué dos números consecutivos suman 27?
b) Un número más 16 es igual al triple de dicho número. ¿Qué número es?
c) Si Juan tiene 3 años más que su hermana y sus edades suman 17, ¿qué edad tiene Juan?
d) $4x - x = 2x - 5$
e) $3x - 3 = x + 3$
f) $\frac{3x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
g) $\frac{3x}{2} + x - 2 = \frac{1}{4} + 2x$
h) $-4(3 - x) = -3$
i) $-4(3 - x) - (-3 - 5x) = -1 + x$
j) $\frac{x-1}{2} = \frac{x}{8}$
k) $\frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{6} = \frac{3}{2}$
l) $\frac{3(x-4)}{2} + \frac{5(2x+1)}{3} = \frac{2x}{4}$
m) $\frac{3(2x-4+x)}{2} - \frac{5(2x-1)}{3} = \frac{2(x-3)}{4}$

Una ecuación de segundo grado corresponde a un polinomio de grado 2, por lo que se puede escribir o reducir a una ecuación equivalente cuya forma sea:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dado que la ecuación es de grado 2, tenemos, a lo sumo, 2 soluciones (raíces) distintas.

Para resolver una ecuación, es decir encontrar los valores de x que hacen verdadera la igualdad, es conveniente factorizar. Como vimos anteriormente, factorizar una ecuación (o un polinomio) consiste en expresarla como un producto de polinomios más simples, esto es, como un producto de polinomios de grado menor, de modo tal que sea más fácil encontrar los valores de x.

Para esto, primero vamos a despejar, de modo tal que la expresión quede igualada a 0. Luego, para encontrar las soluciones (o raíces, es decir los valores que debe tomar la x para hacer que la ecuación sea igual a 0) de la ecuación de segundo grado debemos factorizar aplicando los métodos ya conocidos.

2) Escribir en forma factorizada y resolver:

a) $6x + x(x - 13) = 18$
b) $x^2 - (x + 1)^2 = 2 - x^2$
c) $2x^2 = -8x$
d) $x^2 + 4 = 0$
e) $x^2 - 4 = 0$
f) $2x\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = x(\frac{1}{2}x + 1)$
g) $x^3 - 5x^2 + 45 = 9x$

3) Indicar cuál es el resultado correcto:

a) $\frac{(x-3)-3(x-1)}{(x-3)} =$

i. $-3(x - 1)$
ii. $\frac{-2x}{(x-3)}$

b) $\frac{(x-2)+3(x+2)}{(x+2)} =$

i. $(x + 1)$
ii. $\frac{4(\mathrm{x}+1)}{\mathrm{x}+2}$

DESIGUALDADES

Una desigualdad corresponde a una relación ***desigual*** entre dos expresiones algebraicas en las que pueden aparecer una o más incógnitas.

Las desigualdades se ven representadas por los signos: $<$, $>$; $\leq$; $\geq$

- ⇨ Resolver una desigualdad con una incógnita consiste en encontrar él o los valores de la incógnita para los que se cumple la relación de desigualdad.
- ⇨ A diferencia de las ecuaciones no podemos saber de antemano la cantidad de valores posibles que puede tomar la x.
- ⇨ La solución puede ser un punto: $(x = a)$, un intervalo: $x \in (a, b)$, la unión de intervalos: $x \in (a, b)\ U\ (c, d)$ o puede darse que no exista ningún valor de x que cumpla tal desigualdad. Los valores de un intervalo se indican con "(" y ")" (paréntesis) si sus extremos no están incluidos o con "[" "]" (corchetes) si lo están.

La metodología para resolver las desigualdades es similar a la de las ecuaciones, sólo debemos tener en cuenta que por tratarse de una desigualdad, el signo de desigualdad cambia cada vez que multiplicamos o dividimos por un negativo para mantener la relación.

Ej. Sabemos que: $2 < 3$, ahora ¿qué pasa si multiplicamos ambos términos por (-2)?

$$(-2)(2) ? (-2)(3)$$

$$\Rightarrow \quad (-4) > (-6)$$

En el caso de las desigualdades de segundo orden, al igual que en las ecuaciones de segundo orden, es conveniente factorizarlas.

Ej. $x^2 - 2x - 3 > 0$

- ⇨ Primero vamos a determinar los valores que hacen $= 0$ la desigualdad (serían las raíces) por cualquiera de los métodos conocidos:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 => \ x_1 = -1 \text{ y } x_2 = 3$$

- ⇨ Queremos saber cuándo se cumple $x^2 - 2x - 3 > 0$, lo que es equivalente a preguntarnos cuándo se cumple $(x + 1)(x - 3) > 0$. Sabemos que este producto será mayor a 0 cuando ambos términos sean positivos o cuando ambos sean negativos (por la regla de los signos).

- ⇨ A partir de las raíces vamos a determinar los intervalos donde la x no es igual a cero: $(-\infty\ , -1)$; $(-1\ , 3), (3\ , +\infty)$, siempre tendremos $n + 1$ intervalos, siendo n la máxima potencia del polinomio.

- ⇨ Para esto elegimos "valores de prueba" (VP) que pertenezcan a cada uno de los intervalos:

$$\text{VP}_1 = -2;\ \text{VP}_2 = \ 0;\ \text{VP}_3 = 4$$

- ⇨ Determinamos el signo de cada término evaluado en cada valor de prueba y luego vemos el signo que tendrá el producto de los términos.

$$\text{Si } x = \text{VP}_1 = -2 \ \Rightarrow \ (-2 + 1) < 0 \text{ y } (-5 - 3) < 0$$

$$\Rightarrow\ -\,.\,- = +$$

$$\Rightarrow\ (x+1)(x-3) > 0$$

Si $x = \mathrm{VP}_2 = 0\ \Rightarrow\ (0+1) > 0$ y $(0-3) < 0$

$$\Rightarrow\ +\,.\,- = -$$

$$\Rightarrow\ (x+1)(x-3) > 0$$

Si $x = \mathrm{VP}_3 = 4\ \Rightarrow\ (4+1) > 0$ y $(4-3) > 0$

$$\Rightarrow\ +\,.\,+ = +$$

$$\Rightarrow\ (x+1)(x-3) > 0$$

- ⇨ Por último vemos en cuál o cuáles intervalos se cumple la desigualdad. En nuestro ejemplo vemos en qué intervalos el producto es positivo.

$$\Rightarrow S = (-\infty\,,-1)\ \mathrm{U}\ (3\,,+\infty)\ \text{ o } x\ \epsilon\ (-\infty\,,-1)\ \mathrm{U}\ (3\,,+\infty)$$

Esto mismo podemos hacerlo utilizando una *tablita resumen* o representándolo en la *recta numérica*:

Ej. Con tablita:

	Intervalos	$(-\infty\,,-1)$	$(-1\,,3)$	$(3\,,+\infty)$
	Valor de prueba	-2	0	4
Reemplazando la x por el valor de prueba	Signo de $(x+1)$	-	+	+
	Signo de $(x-3)$	-	-	+
Por la regla de los signos	Signo de $(x+1)(x-3)$	+	-	+

Si tenemos una desigualdad de cociente de polinomios también resolvemos de esta manera.

Ej. Representándolo en con recta numérica:

Dado:

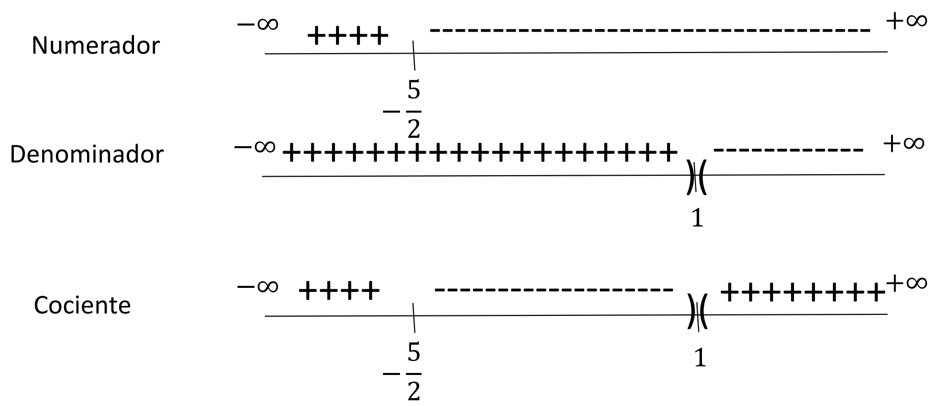
$$\frac{-2x-5}{-x+1} \leq 0$$

- ⇨ Primero vamos a determinar los valores que anulan (es decir hacen $= 0$) el numerador y el denominador:

Numerador: $-2x-5 = 0\ \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

Denominador: $-x+1 = 0\ \Rightarrow x = 1$

- ⇨ Ahora hacemos tres rectas una sobre la otra, en la de arriba representamos el signo del numerador a cada lado del valor que lo anula. En la segunda recta hacemos lo mismo para el denominador. Por último, en la tercer recta marcamos el signo que tendrá el cociente a cada lado de los valores que anulan numerador y denominador.



Nótese que si bien se pide que el cociente sea menor o igual (≤) a cero, sabemos que el denominador no puede ser 0, por lo que el valor que anula el denominador no puede estar incluido en nuestra solución, en cambio el que anula el numerador sí.

- ⇨ Por último vemos en cuál o cuáles intervalos se cumple la desigualdad. En nuestro ejemplo vemos en qué intervalo/s el cociente es negativo.

$$\Rightarrow S = [-\tfrac{5}{2}, 1)$$

<u>1) Resolver:</u>

a) $x + 2 \leq 0$
b) $2x + 3 + 2(x + 1) < -3(1 - x)$
c) $5x - 3\big(3x - (3 - 2x)\big) > 2(3x - 4(5 - x))$
d) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$
e) $\frac{x+5}{20-5x} > 0$
f) $\frac{(x+1)(x-1)}{x} \leq 0$
g) $\frac{6}{x-2} \leq x - 3$

VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** de un número a, representado como $|a|$, es su valor numérico (con signo positivo).

Ej. $|-5| = 5$

- si el número es positivo, su valor absoluto es el propio número.
- si el número es negativo, su valor absoluto es su opuesto (número con signo opuesto, es decir, con signo positivo).
- si el número es 0, su valor absoluto es 0.
- Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto. Ej. $|9| = |-9|$
- El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores en cada uno de los sumandos => $|a + b| \leq |a| + |b|$

  Ej. $|7 + (-3)| = 4$

  $|7| + |-3| = 10$

- El valor absoluto del producto de dos factores es igual al producto de los valores absolutos de los factores => $|a . b| = |a| . |b|$

  Ej. $|4 . (-5)| = 20$

  $|4| . |-5| = 20$

- Si $b \neq 0 \Rightarrow |a \div b| = |a| \div |b|$

  Ej. $|20 \div 4| = 5$

  $|20| \div |4| = 5$

- Si $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

  Ej. sean por ejemplo los números -3 y 8, se verifica:

  $|-3| < 8 \Leftrightarrow -8 < -3 < 8$

Resultados de los ejercicios

NÚMEROS

1)

a) <
b) >
c) <
d) <
e) =
f) >

2)

a) 24
b) 48
c) 0
d) 168
e) 43
f) -21

3)

a) 154
b) -70
c) -7
d) 0
e) 55
f) 32

4)

a) 8
b) $\frac{65}{12}$
c) $\frac{249}{280}$
d) $\frac{97}{40}$
e) $\frac{44}{15}$
f) $-\frac{23}{56}$
g) $\frac{115}{91}$
h) $\frac{26}{7}$

5)

a) $\frac{36}{20}$
b) $\frac{72}{18} = 4$
c) $\frac{64}{45}$
d) $\frac{18}{16}$
e) $\frac{44}{45}$
f) $-\frac{12}{56}$

6)

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
b) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{243}{1024}$
c) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{21}$
d) $\left(\frac{1}{4/9}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{729}{64}$
e) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$
f) 1
g) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$
i) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$
j) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$

7)

a) $\sqrt{64}$
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt[5]{6}$

d) $\sqrt{500}$
e) $\sqrt[8]{100}$
f) $a^{-\frac{1}{2}}$

8)

a) 0
b) 2
c) -1
d) -2

e) -3
f) 4
g) 1
h) 1

POLINOMIOS

1) a) $P(x) + Q(x) = x^2 + 2x + 5$

$P(x) \,.\, Q(x) = 2x^3 + x^2 + 8x + 4$

$P(x)^2 - Q(x) = 3x^2 + 4x - 3$

$x \,.\, P(x) = 2x^2 + x$

b) $P(x) + Q(x) = 4$

$P(x) \,.\, Q(x) = -x^4 + 8x^2 - 12$

$P(x)^2 - Q(x) = x^4 - 3x^2 - 2$

$x \,.\, P(x) = x^3 - 2x$

2) a) $Q(x) = 2x^2 - 3x + 3; R(x) = -10$

b) $Q(x) = -2x^4 - x^2 + 2x - 4; R(x) = 0$

c) $Q(x) = -x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 24x - 48; R(x) = 96x$

3) a) $Q(x) = 4x^2 + x + 1\ ; R(x) = 8$

b) $Q(x) = -x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x - 4; R(x) = 0$

c) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1; R(x) = 0$

ECUACIONES

1)
a) $x = 13$
b) $x = 8$
c) $Juan\ tiene\ 7\ años$
d) $x = -5$
e) $x = 3$
f) $x = -\frac{1}{6}$

g) $x = \frac{9}{2}$
h) $x = \frac{9}{4}$
i) $x = 1$
j) $x = \frac{4}{5}$
k) $x = 2$
l) $x = 1$
m) $x = \frac{17}{4}$

2)

a) $x_1 = -2\,, x_2 = \ 9\,;\ (x+2)(x-9) = 0$

b)$x_1 = -1\,, x_2 = 3;\ (x+1)(x-3) = 0$

c) $x_1 = -4\,, x_2 = 0\,;\ 2x(x+4)$

d) $no\ tiene\ raíces$

e) $x_1 = -2\,, x_2 = 2;\ (x-2)(x+2) = 0$

f) $x_1 = -2, x_2 = 0;\ \frac{1}{2}x\ (x+2) = 0$

g) $x_1 = -3\,, x_2 = 3, x_3 = 5;\ (x-3)(x+3)(x-5) = 0$

3)

a) ii

b) ii

DESIGUALDADES

1)

a) $x \in (-\infty\,;\ 2]$

b) $x \in (-\infty\,;\ -8)$

c) $x \in \left(-\infty\,;\frac{49}{24}\right)$

d) $x \in (-\infty\,;\ -1)\ \mathrm{U}\ (3\,,+\infty)$

e) $x \in (-5\ ,4\ )$; e) $x \in \left[-\frac{5}{2}, 1\right)$

f) $x \in (-\infty\ , -1\ )\ \mathrm{U}\ (0{,}1]$

g) $x \in [0\ ,2\ )\mathrm{U}\ [0 + \infty]$